

Groepen en Ringen

8078254

2 juni 2025

Idealen

Definitie. Een (tweezijdig) ideaal I van een ring R is een deelring $I \leq R$ zodat ook

$$\{ri : i \in I\} = \begin{matrix} rI \subset I \\ Ir \subset I \end{matrix} \quad \forall r \in R$$

We zagen: R/I is een ring $\iff I \trianglelefteq R$.

Voortbrengers van idealen

Definitie. Kies $A \subset R$ deelverzameling. We schrijven (A) het ideaal voortgebracht door A .

- Als $A = \{a\}$ dan is $(A) = (a)$ is het hoofdideaal voortgebracht door a .
- Als $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eindig is, dan heet $(A) = (a_1, \dots, a_n)$ eindig voortgebracht

Wat is (A) ? Er geldt

$$(A) = \bigcap_{I \trianglelefteq R, A \subset I} I$$

want

- voor $I = R$ geldt dat $A \subset R$
- voor idealen $I, J \trianglelefteq R$ geldt: $I \cap J$ is ook een ideaal is ook een ideaal en $rI \subset I, rJ \subset J \quad \forall r \in R \implies r(I \cap J) \subset I \cap J \quad \forall r \in R$

Er geldt ook:

Schrijf $RA = \{r_1a_1 + \dots + r_na_n : r_i \in R, a_i \in A\}$

Net zo AR en RAR ^{1 2}

Dan is RA een links ideaal is dat A bevat:

- gesloten onder optelling ✓
- bevat A ($A = \{1 \cdot a\}$) ✓
- gesloten onder linkse vermv. met $r \in R$ ✓

Andersom geldt dat $RA \subset I$ voor iedere linksideaal $I \supset A$ want $a \in I \implies ra \in R \quad \forall r \in R$ en I is gesloten onder optelling, dus $I = RA$

Voor rechtse idealen geeft dit $I = AR$.

En voor commutatieve ringen is $RA = AR = RAR$ het ideaal voortgebracht door A .

Dus hoofdideaal $(a) = Ra = \{ra : r \in R\}$

En $b \in (a) \iff b = ra$
 $\iff (b) \subset (a)$ voor een $r \in R$ “a deelt b”

Voorbeeld. $6 = 2 \cdot 3$ in $\mathbb{Z}$, dus $(6) \subset (2)$ en $(6) \subset (3)$. Logisch want: $(6) = 6\mathbb{Z} = \{6n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \{2m : m \in \mathbb{Z}\}$ voor $(6) \subset (2)$

Voorbeeld 2. $(3, x) \trianglelefteq \mathbb{Q}[x]$ Basically $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[x]$, dus $(3, x) = (1)$ en $(1) = \mathbb{Q}[x]$

Lemma. Zij $I \trianglelefteq R$ een ideaal. $I = R \iff I$ bevat een eenheid.

Bewijs. “ $\implies$ ” als $I = R$ dan bevat I de eenheid $1 = 1_R$ ✓

“ $\impliedby$ ” Stel dat I een eenheid u bevat. Per definitie bevat I dan ook ru voor alle $r \in R$ dus I bevat $vu = 1$, dus I bevat $rvu = r \quad \forall r \in R$, dus $I = R$ □

We zagen al: R is een lichaam $\iff R^{\times} = R \setminus \{0\}$

Gevolg 1. De ring R is een lichaam $\iff$ de enige idealen zijn $\{0\}$ en R

Bewijs. “ $\implies$ ” R is een lichaam, dan $R^{\times} = R \setminus \{0\}$, dus een ideaal I is $\{0\}$ of bevat een eenheid, maar dan geldt $I = R$ door het lemma.

“ $\impliedby$ ” Kies $0 \neq r \in R$. Dan $(r) = R$ per de aanname, dus $1 \in (r)$ zit in (r) , dus $1 = rs$ voor een $s \in R$, dus r is een eenheid. □

Gevolg 2. Als $\varphi : R \rightarrow S$ een ringhomomorfisme en R is een lichaam, dan $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ of $\varphi = 0$ de nulafbeelding.

Bewijs. $\text{Ker}(\varphi) \trianglelefteq R$; gebruik het vorige gevolg. □

Definitie. Een ideaal $I \trianglelefteq R$ is een *maximaal ideaal* als $I \neq R$ en als voor $J \trianglelefteq R$ geldt dat $J \supset I$ dan $J = I$ of $J = R$.

Definitie. Een ideaal $I \trianglelefteq R$ is een *priemideaal* als $I \neq R$ en $I \trianglelefteq J \trianglelefteq R$ als voor $a, b \in R$ geldt: $ab \in I \implies a \in I$ of $b \in I$.

Lemma. (Zij R commutatief met eenheid)

- $I \trianglelefteq R$ is maximaal $\iff R/I$ is een lichaam
- $I \trianglelefteq R$ is priem $\iff R/I$ is een integraal domein⁴

Gevolg 3. $I \trianglelefteq R$ maximaal $\implies I \trianglelefteq R$ is priem (andersom niet altijd waar)

¹Met een free trial van 40 dagen inbegrepen!

²Julius: “RAwR”

³De eenheden van R

⁴Een ring zonder nuldelers, dus $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$

Bewijs. Een lichaam heeft geen nuldelers dus is een domein. Dus $I \trianglelefteq R$ maximaal $\iff R/I$ lichaam $\implies R/I$ domein $\iff I \trianglelefteq R$ priem $\square$

Bewijs. (voor gevolg 2)

1. De 4e isomorfismestelling zei:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{idealen} \\ \text{zodat} \end{array} \begin{array}{l} S \trianglelefteq R \\ I \subset S \end{array} \right\} \xrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{idealen} \\ \text{van } R/I \end{array} \right\}$$

Dus $I \trianglelefteq R$ maximaal $\iff$ enige idealen in R die I bevatten zij I en $R \iff$ enige idealen in R/I zijn $R/R = \{0\}$ en $R/I \xrightarrow{\text{gev. 2}} R/I$ is een lichaam

2. $I \trianglelefteq R$ priem $\iff I \neq R$ en $ab \in I \implies a \in I \vee b \in I$
 R/I een domein $\iff R/I \neq \{0\}$ en $\bar{a}\bar{b} = 0 \implies \bar{a} \vee \bar{b} = 0$

Maar $r \in I \iff r + I = I \iff \bar{r} = r + I$ is 0 in R/I

$\square$

Voorbeelden

1

$(0) \trianglelefteq \mathbb{Z} : \mathbb{Z}/(0) \simeq \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ is geen lichaam $\implies (0)$ niet maximaal. Wel een domein $\implies (0)$ wel priem.

2

$(5) \trianglelefteq \mathbb{Z} : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ is wel een lichaam, dus (5) is maximaal, dus (5) is ook priem.

3

$(x) \trianglelefteq \mathbb{Z}[x] : \mathbb{Z}[x]/(x) \simeq \mathbb{Z}$. Zie vb 1

4

$(3, x) \trianglelefteq \mathbb{Z}[x] : \mathbb{Z}[x]/(3, x) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Dat is een lichaam dus maximaal en priem.

Opmerkingen

Het volgt uit Zorn's lemma dat ieder ideaal $I \trianglelefteq R$ bevat is in een maximaal ideaal.

Vergelijk $I \trianglelefteq R$ priem $\iff I \neq R$ en $ab \in I \implies a \in I$ of $b \in I$ met p priemgetal in $\mathbb{Z} \iff p \neq 1$ en $p|ab \implies p|a$ of $p|b$

Julius

“peepeeppoopoo”