

Groepen en Ringen

8078254

April 28, 2025

Voorbeeld Zij $(G_1, \star_1)$ en $(G_2, \star_2)$ groepen.
We vormen hieruit het *directe product*.

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2), g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

met operatie

$$(g_1, g_2) \star (g_3, g_4) = (g_1 \star g_3, g_2 \star g_4)$$

Voortaan schrijven we ipv $a \star a$, $a \cdot a (= a^2)$ (ook a^n)
En we schrijven $1 (= 1_G)$ voor de eenheid. (**PAS OP** in $G = (\mathbb{Z}, +)$ geldt dat $(1_{\mathbb{Z}} = 0)$)

Definitie De *orde* van een groep G is de kardinaliteit $|G|$.

De *orde* van een element $a \in G$ is het kleinste getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodat $a^n = 1$. Schrijf dan $n = |a|$.

Als zo'n element n niet bestaat, dan heeft a oneindige orde.

Diëder(Engels: Dihedral)groepen en matrixgroepen

We bekijken nu groepen die de symmetrieën van een meetkundig object beschrijven. De elementen zijn de symmetrieën, de operatie is “na elkaar uitvoeren”, de eenheid is “niets doen”, inverses zijn “ongedaan maken”. (Valt eigenlijk over het algemeen wel te zeggen)

Voorbeeld Neem een driehoek met gelijke zijdelengten en hoekpunten A, B, C.

Symmetrieën:

Rotatie (over het middenpunt) over 120° .

$$r : ABC \mapsto CAB$$

$$r^2 : ABC \mapsto BCA$$

$$r^3 = 1, \text{ dus orde } 3.$$

Reflectie in de as door $C \perp AB$

$$s : ABC \mapsto BAC$$

$$s^2 = 1, \text{ dus orde } 2.$$

De elementen van deze symmetriegroep zijn: $1, r, r^2, s, sr, sr^2 = rs$ (dus orde 6).

Aangezien ieder element een combinatie is van s, r en hun inverses, noemen we s, r de *voortbrengers* van de groep.

Dit veralgemeeniseert naar andere veelhoeken. Daarbij schrijven we elementen als de permutaties van de hoekpunten.

Hierbij is er altijd een rotatie r van orde $n = \# \text{hoekpunten}$.

Als we weten waar 1 heen gaat, kunnen we daarna alleen nog reflecteren in een as door 1. Dan ligt de rest vast. n rotaties $\implies 2n$ elementen in de groep.

Definitie De symmetriegroep van een n -hoek, bestaande uit rotaties en reflecties, heet de *Diëdergroep* D_{2n} van orde $2n$ met elementen $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$
Er geldt dat $rs = sr^{-1}$ en dus $r^i s = sr^{-i} \forall i$

Dus in het algemeen zijn r, s *voortbrengers* van D_{2n} .

Als we alleen voortbrengers geven van een groep, zou die oneindig zijn; alle elementen zijn “woorden” in de voortbrengers.

Dit heet een *vrije groep* (op 2 letters).

In D_{2n} zijn er echter ook relaties. We hebben er een paar gezien:

- $r^n = 1$
- $s^2 = 1$
- $rs = sr^{-1}$

Dit zijn alle onafhankelijke relaties in D_{2n} . We vinden een *presentatie*.

$$D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$$

Opmerkingen

- $(\mathbb{Z}, +)$ heeft voortbrenger 1. Er zijn geen relaties.
- $(\mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}, +)$ heeft voortbrenger $\bar{1}$ en relatie $\bar{1}^n (= n \cdot \bar{1}) = \bar{0} = 1$
- Voortbrengers zijn niet altijd uniek. We kunnen ook zeggen dat D_{2n} wordt voortgebracht door r en sr
- Een presentatie vertelt je dus niet meteen wat alle elementen zijn, of hoeveel het er zijn.

Matrixgroepen

We bekijken matrices over $\mathbb{R}$.

Bekijk eerst:

$$\underbrace{GL_n(\mathbb{R})}_{\text{general linear group}} = \{n \times n \text{ matrices } A \text{ zodat } \underbrace{\det(A) \neq 0}_{\text{Dus } A \text{ is inverteerbaar}}\}$$

De binaire operatie is matrixvermenigvuldiging. Die is associatief. De eenheid is de identiteitsmatrix I_n . Inverses bestaan omdat de matrices inverteerbaar zijn. Bovendien als $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ dan is $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, dus $AB \in GL_n(\mathbb{R})$ Er zijn variaties op:

$$\underbrace{O_n(\mathbb{R})}_{\text{orthogonale groep}} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \underbrace{A^T A = A A^T = I_n}_{\det(A)^2 = 1, \text{ dus } \det(A) = \pm 1}\}$$

Matrices beschrijven symmetrieën van $\mathbb{R}^n$; matrices in $O_n(\mathbb{R})$ behoeden afstanden en heten daarom *isometrieën*.

Ook: $\underbrace{SO_n(\mathbb{R})}_{\text{speciale orthogonale groep}} = \{A \in O_n(\mathbb{R}) | \det(A) =$

1} voor $n \geq 1$.

$SO_n(\mathbb{R}) \leftrightarrow$ rotaties van $\mathbb{R}^n$

$O_n(\mathbb{R}) \leftrightarrow$ rotaties en reflecties van $\mathbb{R}^n$