

Groepen en Ringen

8078254

May 19, 2025

Stelling van Lagrange

Als G een eindige groep is en $H \leq G$ een ondergroep, dan deelt $|H| \mid |G|$ en het aantal (linkse of rechtse) nevenklassen van H in G is $\frac{|G|}{|H|}$

De nevenklasse gH heeft de kardinaliteit van H

Definitie. Het aantal nevenklassen van H in G is de *index* van H in G , notatie $[G : H]$

We zagen elk element $x \in G$ brengt een cyclische ondergroep voort: $\langle x \rangle \leq G$

Gevolg. De orde van een element $x \in G$ deelt $|G|$.

Bewijs. $|x| = |\langle x \rangle|$ en door de stelling van Lagrange geldt $|x| \mid |G|$

Bekijk alle groepen van orde 4:

$|G| = 4a$ dus elementen hebben orde 4, 2 of 1 (de eenheid).

Als G een element van orde 4 heeft, zeg x , dan noodzakelijkerwijs

$$\{1, x, x^2, x^3\} \simeq \mathbb{Z}_4$$

Als niet, dan zijn er 3 elementen van orde 2:

$$G = \{1, a, b, c\} \simeq V_4 \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}_{(a,1)} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}_{(1,b)}$$

Lemma. Als $|G| = p$ een priemgetal, dan is G cyclisch

Bewijs. Neem $x \in G$ niet 1. Dan $|x| = \langle x \rangle = p$ door het gevolg. Dus $G = \langle x \rangle$

Lemma. Als $[G : H] = 2$, dan $H \trianglelefteq G$. **Bewijs.** Gebruik Lagrange voor linkse en rechtse nevenklassen. Het aantal linkse nevenklassen $= \frac{|G|}{|H|} = 2 =$ aantal rechtse nevenklassen.

Partitie: $G = H \sqcup gH$ voor iedere $g \in G \setminus H$, dus $gH = G \setminus H$

$G = H \sqcup Hg$ voor iedere $g \in G \setminus H$, dus $Hg = G \setminus H$

Dus voor $h \in H$ geldt $hH = H = Hh$ en voor $g \in G \setminus H$ geldt $gH = G \setminus H = Hg$, dus $gH = Hg$ voor alle $g \in G$

dus $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\} \leq H$ voor alle $g \in G$

Zo zien we voor $G = D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

Merk op dat het om te laten zien of een groep normaal is, of niet, is het voldoende om dit te doen voor de voortbrenger.

Stelling van Cauchy. Als G een eindige groep en een priemgetal deelt $|G|$ dan geeft G een element van orde p .

We zagen G/N is een groep $\iff N \trianglelefteq G$ normaal $\iff N = \ker(\varphi)$ voor groepshomomorfisme $\varphi : G \rightarrow G'$

We zeiden: φ injectief $\iff \ker(\varphi) = 1_G$ Waarom?

Als $\varphi(g) = \varphi(h)$ dan $\varphi(gh^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)^{-1} = 1$ dus $gh^{-1} \in \ker(\varphi)$ /.../ check notes

Eerste isomorfismestelling. Als $\varphi : G \rightarrow G'$ een groepshomomorfisme, dan $G/\ker(\varphi) \simeq \text{im}(\varphi) \leq G'$