

Groepen en Ringen

8078254

May 19, 2025

peepeepoopoo (-JK)

Groepsacties

Definitie. Een groepsactie van een groep G op een verzameling A is een afbeelding $G \times A \rightarrow A$. $(g, a) \mapsto g \cdot a$

Die voldoet aan

1. “die identiteit van G doet niets”, $1 \cdot a = a$, $\forall a \in A$
2. $g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 g_2) \cdot a$, $\forall g_1, g_2 \in G$, $a \in A$

Opmerking. Diëdergroepen werken (als symmetrieën) op hoekpunten n -hoeken, permutatiegroepen $\leq S_n$ werken op $\{1, 2, \dots, n\}$.

Voor iedere groep G en iedere verzameling A hebben we de actie

$$G \times A \rightarrow A \\ (g, a) \mapsto g \cdot a = a, \quad \forall g \in G, a \in A$$

heet de triviale actie.

We kunnen iedere groep G op zichzelf laten werken:

$$G \times G \rightarrow G \\ (g, h) \mapsto \underbrace{gh}_{\text{groepsactie}} = \underbrace{g \cdot h}_{\text{actie}} \text{ “links-reguliere actie”}$$

Andere manier van een actie beschrijven:

Kies een vaste $g \in G$, laat $a \in A$ variëren. Dan krijgen we:

$$\sigma_g : A \rightarrow A \\ a \mapsto g \cdot a$$

Lemma. σ_g is een bijectie, dat wil zeggen, een permutatie van A .

Bewijs. Het is voldoende om te bewijzen dat σ_g een tweezijdige inverse heeft.

Claim. Dat is $\sigma_{g^{-1}} : a \mapsto g^{-1} \cdot a$

Aan de ene kant: $(\sigma_{g^{-1}} \cdot \sigma_g)(a) = \sigma_{g^{-1}}(\sigma_g(a))$

Argh don't even worry about it. $= 1 \cdot a = a$

Lemma. $\varphi : G \rightarrow S_A, g \mapsto \sigma_g$ waar S_A de groep van permutaties van A is. φ is een groepshomomorfisme. Julius' favo woord

Bewijs. Triv. $\square$

Definitie. Deze φ heet de permutatierepresentatie¹ van de actie. Elke $\varphi : G \rightarrow S_A$ geeft een groepsactie $G \times A \rightarrow A$, $(g, a) \mapsto g \cdot a = \varphi(g)(a)$

¹Enorm bevredigend woord om te typen

Voorbeeld. de permutatierepresentatie van de triviale actie is $g \mapsto 1_{S_A}$

Het hininirfusne φ heeft een kern, “de kern van de actie”:

$$\text{Ker}(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = \sigma_g = 1_{S_A}\} = \{g \in G : g \cdot a = a, \forall a \in A\}$$

Als $\text{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$ dan zeggen we dat de actie trouw (faithful) is.

Bijvoorbeeld links-reguliere actie $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$

We zagen: Kern van een homomorfisme is een normale ondergroep. Voor een groepsactie $G \times A \rightarrow A$ met permutatierepresentatie φ is $G/\text{Ker}(\varphi) \times A \rightarrow A$ een trouwe actie.

Voor een vaste $a \in A$ kunnen we kijken naar

$$\text{Stab}(a) = \{g \in G : g \cdot a = a\}$$

de stabilisator van a

Lemma. $\text{Stab}(a) \leq G$

Bewijs. TB. $\text{Stab}(a) \neq \emptyset$. $1_G \in \text{Stab}(a)$ want $1 \cdot a = a$, dus $\text{Stab}(a) \neq \emptyset$

Als $y \in \text{Stab}(a)$ dan $y^{-1} \in \text{Stab}(a)$, want $y^{-1} \cdot a = y^{-1} \cdot (y \cdot a) = (y^{-1}y) \cdot a = 1 \cdot a = a$

Als $x, y \in \text{Stab}(a)$ dan $xy^{-1} \in \text{Stab}(a) : (xy^{-1}) \cdot a = x \cdot (y^{-1} \cdot a) = a \square$

Voorbeeld. D_6 werkt op $\{A, B, C\}$ waar A, B, C hoekpunten van een driehoek.

$$D_6 = \langle r = (ABC), s = (AB) : r^3 = 1, s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$$

Dus voor een driehoek waar de spiegeling door C gaat en dus A, B omwisselt:

$$\text{Stab}(C) = \langle s \rangle$$

Definitie. Een equivalentieklasse van a , $\{g \cdot a : g \in G\}$ heet de baan (= orbit) van a . Notatie: $\text{Orb}(a)$

Stelling (Orbit stabilisor theorem). Bekijk een actie $G \times A \rightarrow A$ De relatie op A waarbij $a \sim b \iff a = g \cdot b$ voor een $g \in G$ is een equivalentierelatie. Er geldt $|\text{Orb}(a)| = [G : \text{Stab}(a)] = |G|/|\text{Stab}(a)| \quad \forall a \in A$

Bewijs. $\sim$ is

- reflexief: $a \sim a$, want $a = 1 \cdot a$
- symmetrisch: als $a = g \cdot b$, dan $b = g^{-1} \cdot a$ dus $a \sim b$ dan $b \sim a$
- transitief: als $a = g \cdot b$ en $b = h \cdot c$ dan $a = g \cdot (h \cdot c) = (gh) \cdot c$, dus $a \sim b$ en $b \sim c \implies a \sim c$

Dus $\sim$ is een equivalentierelatie.

Stel dat $b \in \text{Orb}(a)$ dus $b = g \cdot a$ voor een $g \in G$.
Bekijk

$$\begin{aligned} \text{Orb}(a) &\rightarrow G/\text{Stab}(a) \leftarrow \text{nevenklassen van } \text{Stab}(a) \\ b = g \cdot a &\mapsto g\text{Stab}(a) \end{aligned}$$

Bewering: Dit is een bijectie, dus $|\text{Orb}(a)| = |G|/|\text{Stab}|$

Injectief. want $g\text{Stab}(a) = h\text{Stab}(a) \iff h^{-1}g \in \text{Stab}(a) \iff (h^{-1}g) \cdot a = a \iff g \cdot a = h \cdot a$

Surjectief. want elke $g \in G$ (die $g\text{Stab}(a)$ geeft) komt uit $\text{Orb}(a)$ als $g \cdot a = b$

Definitie. Als elke twee $a, b \in A$ in dezelfde baan zitten (en er dus maar één baan is), dan heet de actie transitief

Voorbeeld (conjugatie).

Zij G een groep, en $\emptyset \neq A \subset G$ conjugatie-actie: $G \times A \rightarrow A, (g, a) \mapsto g \cdot a = gag^{-1}$

Dat is een actie omdat ik het zeg

Definitie. De kern van de conjugatieactie $\{g \in G : gag^{-1} = a, \forall a \in A\}$ heet de centralisator van A in G .
Notatie: $C_G(A)$ “alle $g \in G$ die commuteren met alle $a \in A$ ”

Als G abels, $A \leq G$, dan $C_G(A) = G$.

Definitie. $\text{Orb}(a)$ onder conjugatie is $\{gag^{-1} : g \in G\}$, de conjugatieklasse van a . Als $A = G$, vinden we de kern $\{g \in G, gag^{-1} = a, \forall a \in G\}$; dit heet het centrum van G . Notatie: $Z(G)$

Definitie. Schrijf $gAg^{-1} = \{gag^{-1} : a \in A\}$ de normalisator van A in G is $\{g \in G : gAg^{-1} = A\}$. Notatie: $N_G(A)$

Epilogue

Dear Julius, Please learn vim keybindings for your own damn good I mean it's up to you but it will make messing with my notes a lot easier. It's not that hard :sob:, not as hard as... my d-, you think!