

Kansrekening

8078254

May 27, 2025

Tying up loose ends

Vorige keer hebben we gekeken naar het bepalen van de kansfunctie/kansdichtheid van $X + Y$ als X, Y onafhankelijk zijn.

Een andere techniek is met momentgenererende functies

Propositie. Zij $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijke kansvariabelen, dan geldt:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Als de mgf's van Z_1 en Z_2 in een open omgeving $((-\delta, \delta))$ van 0 bestaan en

$$M_{Z_1}(t) = M_{Z_2}(t) \text{ for all } t \in (-\delta, \delta)$$

dan geldt $Z_1 \sim Z_2$

Toepassing. Als $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ en $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ onafhankelijk zijn, dan geldt $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Een voorbeeld

Zij $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dat is een beetje lastig, actually; zij $Z \sim N(0, 1)$, dan is $X \sim \mu + \sigma Z$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &= \mathbb{E}(e^{t\mu + t\sigma Z}) = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{uz} f_Z(z) dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{uz} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw e^{\frac{u^2}{2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(w) dw \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dus van de standaard normaalverdeelde functie is de mgf: $M_Z(u) = e^{\frac{u^2}{2}}$

In het algemeen: $M_X(u) = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{t\mu} e^{t^2 \frac{\sigma^2}{2}}$

En vandaag

We gaan volgende week kijken naar het gedrag van $\sum_{i=1}^n X_i, X_i$ onafhankelijk als $n \rightarrow \infty$

- Wet van de grote aantallen
- centrale limietstelling

We willen kansvariabelen simuleren / trekken uit de verdeling van een kansvariabele X :

We genereren een rij:

$$X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$$

Waarbij $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met X

Definitie. Een rij kansvariabelen $(X_i)_{i \geq 1}$ heet onafhankelijk en identiek verdeeld met X (notatie: $X_i \stackrel{iid}{\sim} X$) als:

- Voor elke eindige $I \subset \mathbb{N} : (X_i)_{i \in I}$ zijn onafhankelijk
- $F_{X_i} = F_X \forall i \geq 1$

Random number generator produceert deze rij in het geval dat $X \sim U[0, 1]$ ¹

Vragen:

- als X gegeven is, hoe kan ik trekkingen uit de verdeling van X genereren met behulp van RNG?
- Kan je uit elke verdeling trekkingen genereren?

Experiment. “Kansrekening is X ”

Waar X het volgende woord is.

“Maar een woord als ‘olifant’ is natuurlijk onwaarschijnlijk”

Eén survey later:

$A = \text{supertof}$	$\mathbb{P}(X = A) = 10\%$
$B = \text{handwavey}$	$\mathbb{P}(X = B) = 2\%$
$C = \text{olifant}$	$\mathbb{P}(X = C) = 80\%$
$D = \text{misselijkmakend}$	$\mathbb{P}(X = D) = 8\%$

Dan kunnen we heel simpel uit de $RNG \sim U[0, 1]$ opmaken dat als een kans x daaruit $x \in [0, 0.1] \Rightarrow A, x \in [0.1, 0.12] \Rightarrow B, x \in [0.12, 0.92] \Rightarrow C, x \in [0.92, 1] \Rightarrow D$

Propositie. Stel X is een kansvariabele met een $F_X : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ bijectief.

Zij $U \sim U(0, 1)$, dan geldt

$$F_X^{-1}(U) \sim X$$

Deze simulatiemethode heet de inverse methode.

Proof.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) &= \mathbb{P}(F_X(F_X^{-1}(U)) \leq F_X(x)) \\ &\quad (F_X \text{ is monotoon niet-dalend}) \\ &= \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_X(x) \end{aligned}$$

□

¹Zie dictaat voor meer info

Voorbeeld

$X \sim \text{Cau}$

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}, x \in \mathbb{R}$$

$$F_X^{-1}(y) = \tan(\pi y - \frac{\pi}{2})$$

Dus de propositie $\implies \tan(\pi U - \frac{\pi}{2}) \sim \text{Cau}$ als $U \sim U(0, 1)$

Voldoende voor het bewijs is het vinden van een functie F^{-1} zodat voor alle $0 < p < 1, x \in \mathbb{R}$

$$F^{-1}(p) \leq x \iff p \leq F_X(x)$$

De volgende functie voldoet hieraan: **Definitie.** Zij X een kansvariabele, dan is de kwantielfunctie F_X^{-1} van X gedefinieerd door

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{u \in \mathbb{R} : F_X(u) \geq p\}$$

Uitbreiding. Als F_X^{-1} de kwantielfunctie van X is, $U \sim U(0, 1)$, dan is

$$F_X^{-1} \sim X$$

F_X^{-1} kan niet altijd expliciet uitgerekend worden.
Bijvoorbeeld: $X \sim N(0, 1)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-x^2/2} dx$$

Off topic

Waarom Sjoerd een applaus verdient door een kraan uit te toveren.

“Wie gebruikt hier wel eens LLMs?” > Best veel handen gaan omhoog.

“... voor de studie” > Alle handen naar beneden

Na de vierde keer vragen zegt ChatGPT iets wat enigszins logisch is. Sjoerd: “Awesome! You are my BFF!!!!!!!!!!!!!!”