

Kansrekening

8078254

5 juni 2025

“Vorig keer [sic]”

Zwakke wet van de grote aantallen (WLLN)

$$(X_i)_{i \geq 1}, X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} X, \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ en } \mathbb{E}(X) \text{ bestaat}$$

dan geldt:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X)$$

dwz, $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) = 0$$

Opmerking: het is belangrijk dat $\mathbb{E}(X)$ bestaat.

Bijv als $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Cau}$, dan geldt $\overline{X}_n \sim \text{Cau} \forall n \geq 1$

Numerieke integratie

Numerieke integratie is het numeriek benaderen van $\int_A f(x)dx$ als we deze niet analytisch kunnen bepalen.

Monte Carlo integratie

Voorbeeld. Stel we willen benaderen

$$I = \int_0^1 g(x)dx$$

voor $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

Het idee is om I als een verwachtingswaarde te interpreteren:

$$I = \mathbb{E}(g(U)), \text{ waarbij } U \sim U[0, 1]$$

Dus volgens de wet van de grote aantallen: als $U_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} U[0, 1]$, dan geldt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \xrightarrow{P} I$$

Voorbeeld. $I = \int_{-\infty}^{\infty} k(x)e^{-x^2/2}dx$
 $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zij $X \sim N(0, 1)$

$$\sqrt{2\pi}\mathbb{E}(k(X)) = I$$

—

$$\mathbb{P}(|\overline{U}_i - I| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(g(U))}{n\epsilon^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(g(U)) &= \mathbb{E}((g(U))^2) - (\mathbb{E}(g(U)))^2 \\ &= \int_0^1 (g(x))^2 dx - \left(\int_0^1 g(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

Centrale limietstelling

We hebben eerder gezien (mits je er was):

$$\text{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\text{Var}(X)}{n}$$

We beschrijven de fluctuaties van $\overline{X}_n - \mu$ waarbij $\mu = \mathbb{E}(X)$. De fluctuaties worden kleiner in termen van n , daarom bekijken we:

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\text{Var}(\overline{X}_n)}} = \sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma \sqrt{n}}$$

$$\text{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}, \sigma^2 = \text{Var}(X)$$

Definitie. Zij $(Y_n)_{n \geq 1}$ een rij kansvariabelen, Y een kansvariabele. Dan convergeert $(Y_n)_{n \geq 1}$ in verdeling naar Y . Notatie: $Y_n \xrightarrow{d} Y$, als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = F_Y(y)$$

voor elke $y \in \mathbb{R}$ zodat F_Y continu is in y

$$(Y_n \xrightarrow{P} Y \implies Y_n \xrightarrow{d} Y)$$

Centrale limietstelling (for real this time)

Stelling (centrale limiet stelling (CLT)). Zij $(X_i)_{i \geq 1}$ een rij kansvariabelen, $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} X, \mu = \mathbb{E}(X), \sigma^2 = \text{Var}(X) < \infty$ Zij $Z \sim N(0, 1)$

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\text{Var}(\overline{X}_n)}}$$

Stelling. Zij $(Y_n)_{n \geq 1}$ een rij kansvariabelen, Y een kansvariabele. Stel $\exists \delta > 0$ zodat:

- $M_{Y_n}(t)$ bestaat $\forall -\delta < t < \delta, \forall n > 1$
- $M_Y(t)$ bestaat $\forall -\delta < t < \delta, \forall n > 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) = M_Y(t) \forall -\delta < t < \delta$

Dan geldt $Y_n \xrightarrow{d} Y$ voor $n \rightarrow \infty$

Bewijs. (bewijsschets in een speciaal geval) We nemen aan dat er een $\delta > 0$ is zodat $M_X(t)$ bestaat voor $-\delta < t < \delta$

Schrijf $Z_n = \sum_{i=1}^n W_i$, met $W_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= M_{\sum_{i=1}^n W_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^n M_{W_i}(t) \\ &= \left(M_{\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) \right)^n \\ &= \left(\mathbb{E}(e^{t \frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}) \right)^n \\ &= \left(M_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right)^n = (**) \end{aligned}$$

Schrijf $M = M_{X-\mu}$

Neem $-\delta < t < \delta$ vast. Maak een Taylor-benadering.

$$M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = M(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} M'(0) + \frac{\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2} M''(\alpha_n) = (*)$$

voor een punt α_n tussen 0 en $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$

$$(*) = 1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \underbrace{\mathbb{E}(X - \mu)}_{=0} + \frac{M''(\alpha_n)}{\sigma^2} \frac{t^2}{2n}$$

Merk op: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M''(\alpha_n) = M''(0) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sigma^2$

$$\begin{aligned} (**) &= \left(1 + \frac{M''(\alpha_n)}{\sigma^2} \frac{t^2/2}{n} \right)^n \\ &= e^{t^2/2} = M_Z(t) \end{aligned}$$

□

In de praktijk

...gebruiken we vaak een normale benadering: dwz voor een vaste (grote) n beandaren we

$$F_{Z_n}(z) \approx F_Z(z)$$

Maar hoe groot moet die n zijn?

$$|F_{Z_n}(z) - F_Z(z)| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{n}}, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}|X - \mu|^3}{\sigma^3}$$

Deze benaderingsfout wordt aangenomen als $X_i \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$

Een ander extreem voorbeeld: als $X_i \sim N(0, 1)$, dan is $F_{Z_n} = F_Z(z), \forall z$