

Kansrekening 2

8078254

April 29, 2025

Voorwaardelijke kans

Kansruimte: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Definitie Zij $A, B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) > 0$ dan heet

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

de voorwaardelijke kans op A gegeven B

Voorbeeld trek een kaart uit een standaard kaartspel. Wat is de kans op een harten kaart als de kaart rood is?

A = “kaart is harten”

B = “kaart is rood”

Dus $\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$ want als een kaart een harten kaart is, dan is dit sowieso ook rood.

Voorbeeld We weten dat een collega 2 kinderen heeft en dat één daarvan een zoon is. Wat is de kans dat de collega twee zoons heeft?

(Spoilers: $\frac{1}{3}$). We zeggen $\Omega = \{DD, DZ, ZD, ZZ\}$.

Dan $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}, \omega \in \Omega$

Dus met $A = \{ZZ\}$ en $B = \{DZ, ZD, ZZ\}$

Dus $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

Intuïtie: De volgorde van de kinderen maakt uit. Als er één zoon is, kan deze de oudste of de jongste zijn.

Propositie (bewijs is een opgave) Zij $B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B)$ Dan is

$\mathbb{Q} : \mathcal{F} \mapsto [0, 1], \mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A|B)$

($\mathbb{Q}$ heeft hier verder niets met de rationale getallen te maken)

een kansmaat.

Onafhankelijkheid

Definitie A heet onafhankelijk van B als het voor-
doen van B geen informatie geeft over A . Formeler:
 $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

We zien dat dit symmetrisch is, dus $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

note: Om delen door 0 te voorkomen, wordt dit normaalgesproken formeel gedefiniëerd met $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Voorbeeld A = kaart is aas, B = kaart is harten.

$\frac{1}{52} = \mathbb{P}(A \cup B)$ en $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4}$ Merk op dat $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$, dus ze zijn onafhankelijk.

Definitie Zij I een indexverzameling (bijv. $\mathbb{N}$).

Zij $(A_i)_{i \in I}$ een collectie gebeurtenissen. Deze heten *onafhankelijk* als

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

voor elke $J \subset I$ met $|J| < \infty$

Een valkuil Stel (A, B) onafhankelijk, (A, C) onafhankelijk en (B, C) onafhankelijk (*Paarsgewijze onafhankelijkheid*) $\nRightarrow (A, B, C)$ onafhankelijk.

Tegenvoorbeeld: 2 worpen met een munt (uitkomsten zijn onafhankelijk):

A = de eerste worp is kop.

B = de tweede worp is munt.

C = beide worpen hebben dezelfde uitkomst.

Wet van de totale kans

Situatie: We weten:

- $\mathbb{P}(A|B)$
- $\mathbb{P}(A|B^c)$
- $\mathbb{P}(B)$

En we willen weten: $\mathbb{P}(A)$

Dan zegt de wet van de totale kans: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$

Regel van Bayes

Stel we weten $\mathbb{P}(A|B)$ en we willen weten $\mathbb{P}(B|A)$.

$$\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$