

Kansrekening 3

8078254

May 19, 2025

Discrete kansvariabelen

Informele definitie Een kansvariabele is een grootheid wiens waarde onzeker is en wordt bepaald door de uitkomst van een kansexperiment $((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$.
Eenvoudig voorbeeld Een worp met 2 dobbelstenen.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$\mathbb{P}$ = uniforme kansmaat

X = som van de twee ogen, dus $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$

Waar X de kansvariabele. Het leuke is dat we kunnen kiezen wat we doen met die variable, als een echte variable. Bijvoorbeeld:

$$X'(\omega_1, \omega_2) = \min(\omega_1, \omega_2)$$

$$Y = \text{Maximum van } X \text{ en } X'.$$

En andere grapjes.

Kansvariabelen in de echte wereld

- Aantal zonuren op 2 mei 2025.
- Aantal kinderen dat een gemiddelde persoon in 2030 krijgt.
- Aantal leerlingen die naar het werkcollege gaan.
- Wat Wouter vanavond gaat eten¹.

A.n.f.s.c.d.

Waarin zijn we nu geïnteresseerd als we het over kansvariabelen hebben?

In ieder geval niet de exacte waarde, want die kunnen we niet weten.

Waarin wel: $\mathbb{P}(X \in A)$, $A \subset \mathbb{R}$

Stel dus dat we de kans willen weten dat er meer dan 30 mensen op komen dagen: $\mathbb{P}(X > 30)$

Maar wat betekent $\mathbb{P}(X \in A)$?

Voor

$A \subset \mathbb{R}$ schrijven we $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$

En

$\mathbb{P}(X \in A) := \mathbb{P}(\{X \in A\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\})$

Ofwel, de kans dat een gegeven X (uitkomst kans) in A zit.

Definitie Een *Natuurlijk object* is de *kansverdeling* van de kansvariabele X :

¹Ook als Wouter dit zelf zeker weet, is dit een kansvariabele, want ik heb geen idee.

$$A \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$$

In het algemeen kunnen we $\mathbb{P}(X \in A)$ allen definiëren voor “meetbare” deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Dat komt in dit vak niet aan bod.

Formele definitie van een kansvariabele
Een functie $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ een *kansvariabele* als

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}$$

De verdelingsfunctie $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ is gedefinieerd door

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

Stelling (Zie Maat- en integratietheorie) F_X legt de kansverdeling van X volledig vast.

Stelling (Zie dictaat voor bewijs) F_X heeft de volgende eigenschappen:

1. $F_X(u) \leq F_X(v)$ als $u \leq v$
2. F_X is rechts-continu: $\lim_{y \downarrow x} F_X(y) = F_X(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
4. $\lim_{y \uparrow x} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x), \forall x \in \mathbb{R}$

Stelling Zij $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ met eigenschappen 1, 2, 3 van de vorige stelling, dan is er een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en een kansvariabele $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zodat $F_X = F$

Twee smaken kansvariabelen

- Discreet
- Continue

Definitie Een kansvariabele heet discreet als $\text{Im}(X)$ aftelbaar is. In dit geval is de *kansfunctie* (En: Probability mass function (pmf)) gedefinieerd door $p_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Merk op: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{y \in \text{Im}(X): y \leq x} \mathbb{P}(X = y) = \sum_{y \in \text{Im}(X): y \leq x} p_X(y)$

Concrete voorbeelden

Bernoulli verdeelde kansvariabelen

Definitie Zijn $0 \leq p \leq 1$, dan heet een kansvariabele Bernoulli-verdeeld met succesparameter p als:

- $\text{Im}(X) = \{0, 1\}$
- $p_X(1) = p, p_X(0) = 1 - p$

X modelleert de uitkomst van een kansexperiment met 2 mogelijke uitkomsten:

- “succes” $\leftrightarrow X = 1$
- “mislukking” $\leftrightarrow X = 0$

Een voorbeeld hiervan: een willekeurige persoon uitkiezen en vragen “Ga jij het tentamen halen?”. p is dus de succes kans.

Geometrische verdeling

We herhalen het succes/mislukking experiment willekeurig vaak, ervanuitgaande dat de uitkomsten onafhankelijk zijn. We willen dat de kansvariabele X zo dat:

$X = k$ eerste succes in poging k

Definitie een kansvariabele X heet geometrisch verdeeld met succeskans $0 < p \leq 1$ als $\text{Im}(X) = \mathbb{N}$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Want je moet eerst $k - 1$ maal falen, en dan één keer slagen.

Binomiale kansverdeling (Speedrun want 5 min tot de bel)

We herhalen het succes/mislukking experiment n keer. X Modelleert het aantal successen.

$X = k \leftrightarrow k$ successen

Definitie een kansvariabele X heet binomiaal verdeeld met parameters $0 \leq p \leq 1, n \in \mathbb{N}$ als $\text{Im}(X) = \{0, 1, \dots, n\}$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = \{0, 1, \dots, n\}$$