

Kansrekening 4

8078254

May 19, 2025

Binomiale verdeling

Definitie. Een kansvariabele heet binomiaal verdeeld met parameters $n \in \mathbb{N}$ en $p \in [0, 1]$ als $\text{Im}(X) = \{0, 1, \dots, n\}$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{En } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Poisson verdeling

Zij $\lambda > 0$ een discrete kansvariabele. X heet Poisson verdeeld met parameter λ als $\text{Im}(X) = \mathbb{N} \cup 0$ en

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Merk op:

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

Poissonverdeling is een generiek model voor het aantal "aankomsten" over een gegeven tijdsinterval.

Voorbeelden:

- aantal aankomsten van vrachtwagens tussen 09:00 en 10:00 bij een distributiecetrum.
- aantal leerlingen die naar het werkcollege komen tussen a en b .
- aantal notificaties die je krijgt op je telefoon terwijl je slaapt.

Voorbeeld Tijdsinterval (genormaliseerd): $[0, 1]$

We knippen het interval op in n gelijke delen.

Als we n steeds groter maken wordt het steeds plausibeler dat er maar één van twee dingen gebeurt:

- Er vindt één aankomst plaats.
- Er vindt geen aankomst plaats.

Ofwel: **Modelaannames:**

1. De kans dat er in een tijdsinterval meer dan 1 aankomst plaatsvindt wordt verwaarloosbaar als $n \rightarrow \infty$.
2. En de kans op 1 aankomst is proportioneel aan de lengte van het interval: $\frac{\lambda}{n}$ voor een zekere $\lambda > 0$
3. Aankomsten in verschillende tijdsintervallen zijn onafhankelijk.

We gaan zelfs 1. nog vereenvoudigen voor het gemak: De kans op meer dan 1 aankomst is 0.

(Merk op dat dit model niet goed is voor situaties waar de kans over het tijdsinterval niet homogeen is.)

Omdat er iemand aankomt, of niet aankomt, vindt er een succes-experiment plaats, sterker nog, een Bernoulli verdeeld kansexperiment.

Merk op: (Zie aanname 3.) Het totale aantal aankomsten over de n deelintervallen X_n is binomiaal verdeeld met parameters n en $\frac{\lambda}{n}$

Wat is de verdeling van X_n als $n \rightarrow \infty$?

Spoilers: De Poisson-verdeling.

De limietstelling van Poisson

Zij $X_n \text{ Bin}(n, p_n)$ waarbij $p_n|_{n \geq 1}$ een rij in $[0, 1]$ is zodat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$$

voor een zekere $\lambda > 0$. Dan geldt voor elke $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Lemma. $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ **Definitie.** $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ Because reasons. Zie dictaat

Lemma. Als $(x_n)_{n \geq 1}$ een rij is en $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x_n}{n})^n$$

Bewijs. $k = 0$:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = (1 - p_n)^n = (1 - \frac{np_n}{n})^n \rightarrow e^{-\lambda}$$

$k > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{np_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n (1 - p_n)^{-k} \\ &= \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{1}{n^k}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{(np_n)^k}{k!} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n}_{\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Een experiment We zetten blind een kruisje op een lijnstuk. (In which Anders is spinning right round, right round.).

X is de onzekere positie van het kruisje. We kunnen van de continue lijn een discreet model maken door het in 10 stukken op te delen.

Discreet model X_{10} is de positie van het linker eindpunt van het interval waar het kruisje landt. X_{10} is uniform verdeeld in $\{0, 1, \dots, 9\}$

Definitie. $A \subset \mathbb{R}, |A| < \infty$, dan is een kansvariabele uniform verdeeld in A als $\text{Im}(X) = A$

$$\mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{|A|}$$

Probleem De kansfunctie is in de limiet niet geschikt, want $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = 0$. We kunnen wel naar de verdelingsfunctie kijken. Die gaat van 0 tot 1 over het interval $[0, 10]$

Definite. Zij $\alpha < \beta$ dan heet een kansvariabele uniform verdeeld in $[\alpha, \beta]$ als $F_X(x) = 0$ als $x < \alpha$, $\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ als $\alpha \leq x \leq \beta$, 1 als $x > \beta$

Gekke eigenschap: $\mathbb{P}(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Definitie. Een kansvairabele X heet continu als er een $f_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ bestaat zodat

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

f_X heet kansdichtheid van X .

Merk op:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1 (= \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x))$$

Omgekeerd als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voldoet aan:

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- f is intergreerbaar
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$

dan is

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

de verdelingsfunctie van een kansvariabele.