

Kansrekening

8078254

May 19, 2025

Continue kansvariabele

Definitie. Een kansvariabele X heet continu als er een $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ bestaat zodat

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, x \in \mathbb{R}$$

f_X heet de kansdichtheid van X

Omgekeerd: elke $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z.d.d

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- f is integreerbaar en $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$f(x)$ is de kansdichtheid van een continue kansvariabele.

In het algemeen geldt: $F'_X(x) = f_X(x)$ voor alle x waar F_X diff. is

Definitie. Een continue kansvariabele X heet exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$ als

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0, \infty)}(x)$$

Generiek model voor de wachttijd toot de eerste "aankomst".

Interpretaties

Wat is $f_X(x)$?

- Kans dat $X = x$? NEE (Bewijs in dictaat)
- Überhaupt een kans? Still no
- $\mathbb{P}(x - \epsilon < X < x + \epsilon) \approx f_X(x) 2\epsilon$

Verwachtingswaarde

Het verdelingsprobleem

We hebben:

- 2 spelers
- pot met geld
- spelen tot de eerste speler 10 ronden heeft gewonnen
- kansspel

De vraag is: Hoe moeten we de pot verdelen bij een vroegtijdig einde?

Oplossing van Fermat en Pascal:

Verdeel de pot naar de kans op winst.

Algemener:

Als een spel mogelijke uitkomsten $x_1, x_2, \dots, x_n$ heeft

die plaatsvinden met kansen $p_1, \dots, p_n$, verdeel volgens

$$p_1 x_1, \dots, p_n x_n$$

Definitie. Zij X een discrete kansvariabele, dan is de verwachtingswaarde van X gedefiniëerd door

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} x p_X(x)$$

als de rechterzijde absoluut convergent is. Dat wil zeggen dat de absolute waarden van deze reeks een convergente reeks oplevert. ($\sum_{x \in \text{Im}(X)} |x p_X(x)|$ convergent)

Als $\sum_{x \in \text{Im}(X)} x p_X(x) = \pm\infty$, dan schrijven we $\mathbb{E}(X) = \pm\infty$

Voorbeeld. De geometrische verdeling: $X \sim \text{Geom}(p), 0 < p \leq 1$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p$$

$$\begin{aligned} &= p \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{d}{dp} (1-p)^k \\ &= -p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dp} (1-p)^k \\ &= -p \frac{d}{dp} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k}_{\text{Geometrische reeks}} \quad (\text{de "fuck it" stap}) \\ &= -p \frac{d}{dp} \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Probeer zelf eens te beredeneren waarom voor de Poisson-verdeling geldt dat $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Definitie. Zij X een continue kansvariabele, dan is de verwachtingswaarde van X gedefiniëerd door

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

mits de rechterzijde bestaat.

Idee: benader X met discrete kansvariabele en Y_n , neem als definitie $\mathbb{E}(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n)$ (Stel $\text{Im}(X) \subset (0, 1]$)

Definiëer een discrete kansvariabele Y_n zodat $Y_n = \frac{k}{n} \Leftrightarrow X \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$

Merk op: $|Y_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{n}$ voor elke $\omega \in \Omega$

$$\infty x f_X(x) dx$$