

Kansrekening

8078254

May 13, 2025

Voorwaardelijke verwachting

Definitie. Zij X een discrete kansvariabele, $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B) > 0$. De voorwaardelijke verwachting van X gegeven B is gedefinieerd door

$$\mathbb{E}(X|B) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \mathbb{P}(X = x|B)$$

Kleine reminder. Wet van totale kans: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$ voor twee kansen. Algemeen:

Als $(B_i)_{i \geq 1}$ een rij gebeurtenissen is z.d.d.

- $\mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i$
- $\bigcup_{i \geq 1} B_i = \Omega$
- $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$

Dan geldt:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Stelling. Stel $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B) > 0$ dan geldt

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{E}(X|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

Algemeen, als B_i dezelfde eigenschappen heeft als de wet van de totale kans, dan geldt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}(X|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Toepassing.

Context: Succes / mislukking experiment.

- p de kans op succes
- X het eerste succes
- S_1 de eerste gebeurtenis is een succes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X|S_1^c)\mathbb{P}(S_1^c) + \mathbb{E}(X|S_1)\mathbb{P}(S_1) \\ &= (\mathbb{E}(X) + 1)(1 - p) + 1 * p \\ &= \mathbb{E}(X) + 1 - p\mathbb{E}(X) - p + p \\ \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Transformaties

Van kansvariabelen.

Definitie. Zij X een kansvariabele, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is

$$g(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g(X)(\omega) = g(X(\omega))$$

Als¹ $g(X)$ een kansvariabele is, dan noemen we $g(X)$ een getransformeerde kansvariabele.

Voorbeeld. Een optiecontract geeft recht om een aandeel te kopen op een gegeven tijdstip in de toekomst tegen een vastgestelde prijs p .

Waarde van de optie: $\max(X - p, 0)$

Koers op gegeven tijdstip X

Voorbeeld. $X \sim \text{Unif}\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $g(x) = |x|$ Dan $\text{Im}(g(X)) = \{0, 1, 2\}$

Dan zien we: $\mathbb{P}(g(X) = 0) = \mathbb{P}(|X| = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{5}$
en $\mathbb{P}(g(X) = 1) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Propositie. Zij X een discrete kansvariabele, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dan geldt

$$\mathbb{P}(g(X) = y) = \sum_{x \in \text{Im}(X): g(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$$

Stelling. Zij X een discrete kansvariabele, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Dan geldt

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \text{Im}(X)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Gevolg. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Stelling. Zij X een continue kansvariabele, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (zodat $g(X)$ een kansvariabele is), dan geldt

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

¹In dit vak zal dit altijd het geval zijn