

Kansrekening

8078254

May 15, 2025

Nog even over vorige keer

Gevolg. Als $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dan

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Andersom, als

$$Z \sim N(0, 1), \text{ dan is } X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Algemeen

Stelling. Zij X een continue kansvariabele, $Y = aX + b, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{als } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{als } a < 0 \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{als } a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

Gevolg.

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} a = \frac{1}{\sigma}, b = -\frac{\mu}{\sigma}$$

Verwachtingswaarde van de normale verdeling

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ Merk op:

$Z \sim N(0, 1)$, dan is $X \sim \mu + \sigma Z$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mu + \sigma Z) \\ &= \mu + \sigma \mathbb{E}(Z) \end{aligned}$$

Goddamn math:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Momenten en staarten

Definitie. Zij X een kansvariabele. Dan heet voor $p \geq 1$

$\mathbb{E}(X^p)$ het p-de moment van X

$\mathbb{E}(|X|^p)$ het p-de absolute moment van X

“Staarten van X ”: $\underbrace{\mathbb{P}(X \geq x)}_{\text{rechterstaart}}$ en $\underbrace{\mathbb{P}(X \leq -x)}_{\text{linkerstaart}}$ als $x > 0$

“groot is”.¹

Er zijn hier hele leuke plaatjes bij te tekenen. Ik heb geen zin/tijd om dezen te $\text{\TeX}$ en, dus dat doe ik niet. Anyway:

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \int_x^{\infty} f_X(u)$$

Stelling. (Markov) Markov ketens hebben we toch al gehad?? Zij Z een kansvariabele. $Z \geq 0$ (dwz. $\text{Im}(Z) \subset [0, \infty)$)

Dan geldt

$$\mathbb{P}(Z \geq s) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{s}, s > 0$$

Dit is een beetje een slappe afchatting. MAAR we kunnen met een “grote truc” hier iets mooiers uit halen:

Gevolg. Als X een kansvariabele en $p \geq 1$, dan geldt: $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{t^p}, t > 0$

Dus hoe meer momenten er bestaan, hoe sneller de staat kleiner wordt.

Bewijs. Merk op:

$$|X(\omega)| \geq t \iff |X(\omega)|^p \geq t^p, \forall \omega \in \Omega$$

d.w.z.

$$\{|X| \geq t\} = \{|X|^p \geq t^p\}$$

Hieruit volgt:

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) = \mathbb{P}(|X|^p \geq t^p) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{t^p}$$

Stelling. Zij X een kansvariabele.

$$\mathbb{E}(|X|^p) = \int_0^{\infty} p x^{p-1} \mathbb{P}(|X| \geq x) dx$$

Gevolg. (Chebyshev)

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}, \forall t > 0$$

(Wordt later gebruikt voor de wet van de grote aantallen)



¹Lekker vaag allemaal

Definitie. De variantie van een kansvariabele is

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

ruwe maat voor de spreiding van de kansverdeling van X . (**Inlever:** $b \mapsto \mathbb{E}[(X - b)^2]$ neemt een uniek minimum aan $\mathbb{E}(X)$)

In het bijzondere geval van de normale verdeling:

Voorbeeld. Als $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dan is $\mu = \mathbb{E}(X)$. Wat je kan laten zien maar we niet gaan doen, is dat $\sigma^2 = \text{Var}(X)$

$X \sim \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0, 1)$, dus $\text{Var}(X) = \text{Var}(\mu + \sigma Z) \cdots$

$$\text{Var}(Z) = 1$$

Definitie. Zij X een kansvariabele dan heet

$$M_X : \text{Dom}(M_X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Dom}(M_X) = \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(e^{tx}) \text{ bestaat}\}$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tx})$$

heet de momentgenererende functie (mgf)

- Altijd: $0 \in \text{Dom}(M_X)$ ($M_X(0) = 1$)
- Het kan gebeuren dat $\text{Dom}(M_X) = \{0\}$

Stelling. Stel $\exists \delta > 0$, zodat $(-\delta, \delta) \subset \text{Dom}(M_X)$. Dan is M_X willekeurig vaak differentieerbaar en

$$M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$$

Bovendien: Als Y een kansvariabele is, $(-\delta, \delta) \subset \text{Dom}(M_Y)$ en

$$M_X(t) = M_Y(t), -\delta < t < \delta$$

dan geldt: $X \sim Y$

Voorbeeld. $X \sim \text{Ber}(p)$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tx}) \\ &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} e^{tx} \mathbb{P}(X = x) \\ &= e^0 \mathbb{P}(X = 0) + e^t \mathbb{P}(X = 1) \\ &= (1 - p) + pe^t \end{aligned}$$

Dan zien we

$$\mathbb{E}(X) = M'_X(0)$$

Definitie. Zij I een interval in $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dan heet f convex als

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in I, \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

Jensen's ongelijkheid

Middel om $\mathbb{E}(g(X))$ af te schatten.

Stelling. als $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convex is en X een kansvariabele met $\text{Im}(X) \subset I$ dan geldt

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}[f(X)]$$