

Kansrekening

8078254

22 mei 2025

Wat hebben we gemist?

- Multidimensionale kansen
- Kansvectoren
- AAAA

Onafhankelijke kansvariabelen:

Informeel: $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) * \dots * \mathbb{P}(X_n \in A_n)$ “voor alle $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ ”

Formeel:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

Vandaag gaan we transformaties van kansvectoren behandelen, dat wil zeggen, $g(X_1, \dots, X_n)$ waarbij $(X_1, \dots, X_n)$ een kansvector en $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Begin

Stelling. Zij (X_1, X_2) een kansvector, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
Dan geldt: als (X_1, X_2) discreet is:

$$E_g(X_1, X_2) = \sum_{x_1 \in \text{Im}(X_1)} \sum_{x_2 \in \text{Im}(X_2)} g(x_1, x_2) p_X(x_1, x_2)$$

Als (X_1, X_2) continu is, dan geldt:

$$E_g(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Gevolg. ($\mathbb{E}$ is een lineaire operatie). Voor alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, kansvariabelen X_1, X_2

$$\underbrace{\mathbb{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2)}_* = \underbrace{a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 \mathbb{E}(X_2)}_{**}$$

We gebruiken de volgende observatie:

Propositie. Als (X_1, X_2) een continue kansvector, dan geldt:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2$$

Hetzelfde geldt voor $f_{X_2}(x_2)$.

Bewijs. (voor X_1, X_2 continue kansvector)

$(*) = \mathbb{E}[g(X_1, X_2)]$, waarbij

$$g(x_1, x_2) = ax_1 + a_2 x_2$$

Stelling impliceert:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1 x_1 + a_2 x_2) f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_1 x_1 f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_2 x_2 f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) dx_1 \right]}_{f_{X_2}(x_2)} dx_2 \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad + a_2 \mathbb{E}(X_2) \\ &= a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 \mathbb{E}(X_2) \end{aligned}$$

□

Gevolg (van het gevolg). (monotonie van $\mathbb{E}$) Als X en Y kansvariabele zijn, $X \leq Y$, dan is $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

Bewijs. Bekijk $Z = Y - X$. Dan is $Z \geq 0$, dus $\mathbb{E}(Z) \geq 0$ (uit de definitie van de verwachtingswaarde).

De lineariteit impliceert $0 \leq \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y - X) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)$ □

Gevolg. Zij $(X_1, \dots, X_n)$ een kansvector. Dan zijn equivalent:

1. $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk
2. $\mathbb{E}(g_1(X_1) * \dots * g_n(X_n)) = \mathbb{E}(g_1) * \dots * \mathbb{E}(g_n)$ voor alle $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Bewijs. Zie dictaat. □

Gevolg (van het gevolg). Als $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk, en $h_1, \dots, h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan zijn

$$h_1(X_1), \dots, h_n(X_n)$$

onafhankelijk. “Een handige stelling om in je broekzak te hebben”

$$F_M(x) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x)^1$$

¹“een mooie toverformule”

$$g(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\} \quad M(\omega) = \max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

Bewijs.

$$F_M(x) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) (= *)$$

Observatie: voor elke $\omega \in \Omega$

$$\max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \leq x \iff X_i \leq x, \text{ voor alle } 1 \leq i \leq n$$

dus

$$* = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \stackrel{\text{onafh.}}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x_n)$$

Zij $\hat{M} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Dan geldt $F_{\hat{M}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x))$ $\square$

Sommen van kansvariabelen

Stelling (discrete kansvariabele). Zij X, Y discrete en onafhankelijke kansvariabelen. $Z = X + Y$

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{y \in \text{Im}(Y)} \mathbb{P}(X = z - y) \mathbb{P}(Y = y)$$

Voorbeeld. $X, Y \sim \text{Ber}(p)$, X, Y onafhankelijk.

$$Z = X + Y. \text{Im}(Z) = \{0, 1, 2\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \\ &= \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{P}(Y = 0) = (1 - p)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(\{X = 0, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 0\}) \\ &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \\ &= \mathbb{P}(X = 0) \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1) \mathbb{P}(Y = 0) \\ &= 2p(1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 2) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Dus Z is binomiaal verdeeld met parameters $p, 2$ (= aantal variabelen)

Algemener. Als $X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(p)$ onafhankelijk, dan

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$$

Nu voor het continue geval

Stelling. Zij X, Y continue kansvariabele en onafhankelijk, $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Voorbeeld. $X, Y \sim \text{Unif}([0, 1])$

$$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x), f_Y(y) = 1_{[0,1]}(y)$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,1]}(z - y) 1_{[0,1]}(y) dy \\ &= \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq z - y \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{als } \max\{z - 1, 0\} \leq y \leq \min\{z, 1\} \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \\ &= \int_{\max\{z-1, 0\}}^{\min\{z, 1\}} \min\{z, 1\} - \max\{z - 1, 0\} \text{ als } 0 \leq z \leq 2 \end{aligned}$$